Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires

1.1 Systèmes d'équations linéaires

1.1.1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1.1.1.1 *Équation linéaire*

Une équation linéaire est une équation que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

où :
- les x_i sont les inconnues
- les a_i sont les coefficients
- b est le second membre

Les coefficients a_i et le second membre b sont des constantes indépendantes des inconnues x_i. En général, ils sont donnés par une situation pratique.

Exemples. Les équations suivantes sont linéaires.

- $3x_1 - 2x_2 = 4$
- $3x - 2y + z = 6$. Bien sûr, le nom donné aux inconnues (x_1, x_2, x_3 ou x, y, z) n'est pas important.
- $3x_2 - 2x_1 = 6 - 4x_3$ est linéaire car on peut l'écrire sous la forme $-2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6$
- $\sqrt{3}x - \frac{y}{3} = 4t$. Si t est une constante, alors cette équation est linéaire d'après la définition. Si t est une inconnue, alors l'équation peut être écrite sous la forme $\sqrt{3}x - \frac{y}{3} - 4t = 0$.

Les équations suivantes ne sont pas linéaires :
- $3\sqrt{x} - y = 0$
- $3x_1 \cdot x_2 = 4$
- $3x_1^2 - 2x_1 = 5$

1.1.2 Système d'équations linéaires

Définition 1.1.1.2 *Système d'équations linéaires*

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'une ou plusieurs équations linéaires.
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

— C'est un système à m équations et n inconnues.
— Les a_{ij} sont les coefficients. i désigne la i–ème équation et j désigne la j–ème inconnue.
— Les b_i constituent le second membre du système.

Exemples.

— $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & -4x_3 = 5 \\ 4x_1 & +2x_3 = 6 \end{cases}$

— $\begin{cases} 4{,}5x_1 - 3x_2 + \pi x_3 - 4x_4 = 8 \\ 3{,}6x_1 + \sqrt{9{,}5}x_2 + \dfrac{3}{9}x_3 - 6x_4 = 14{,}5 \\ 12x_1 + x_2 - x_3 + \dfrac{\sqrt{9}}{2}x_4 = 0 \end{cases}$

1.1.2.1 Solutions d'un système d'équations linéaires

Définition 1.1.1.3 *Solution d'un système d'équations*

Une solution d'un système d'équations à n inconnues est une liste $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de nombres qui transforme chaque équation en une égalité vraie quand on substitue s_1 à x_1, s_2 à x_2, ..., s_n à x_n.
Résoudre un système consiste à trouver l'ensemble de ses solutions.
Un système qui admet au moins une solution est dit compatible, ou consistant. S'il n'admet pas de solution, il est incompatible, ou inconsistant.
Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Exemples.

1. $(2, 3)$ est une solution de $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ car $\begin{cases} 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0 \\ 4 \times 2 + 3 = 11 \end{cases}$

   Ce système est donc compatible.
2. Les systèmes suivants sont équivalents : $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$
3. Le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ est incompatible.

4. On notera généralement $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions d'un système.
   Si le système m'a pas de solution, on notera $\mathcal{S} = \emptyset$. Le symbole $\emptyset$ représente l'ensemble vide.
   Nous utiliserons la notation $\{\dots\}$ pour désigner un ensemble. Par exemple : $\mathcal{S} = \{(2;3)\}$ signifie que l'ensemble des solutions contient uniquement le point $(2;3)$.
   Lorsque l'on veut définit un ensemble par une propriété, on écrira $\{\dots|\dots\}$. Par exemple $\mathcal{S} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x+y=1\}$ signifie que l'ensemble des solution est l'ensemble des couples $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ qui satisfont la propriété $x+y=1$.

Remarque 1.1.1.4. *Il est alors naturel de se demander :*
- *Un système a-t-il toujours une solution ?*
- *S'il en a, en a-t-il une seule ou plusieurs ? Combien ?*
- *Comment déterminer ces solutions ?*
- *Comment le faire « rapidement » ?*

Théorème 1.1.1.5

Un système d'équations linéaires ne peut être que dans l'une de ces trois situations :
1. Il n'admet pas de solution
2. Il admet une solution unique
3. Il admet une infinité de solutions

Démonstration. Admis pour l'instant.

Idée : si les listes $(s_1, \dots, s_n)$ et $(t_1, \dots, t_n)$ sont deux solutions, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la liste $(\lambda s_1 + (1-\lambda)t_1, \dots, \lambda s_n + (1-\lambda)t_n)$ est aussi solution. $\square$

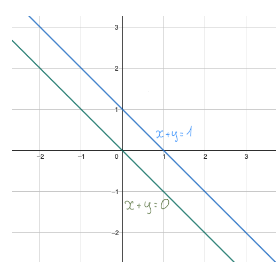
Vous savez déjà résoudre un système d'équations linéaires pour des petits m et n. Résoudre un système de m équations à n inconnues est « facile » si $n = m = 2$, 3, 4... Mais si $n = 10^9$ et $m = 3{,}2 \times 10^8$?

Il faudra donc avoir une méthode claire et efficace.

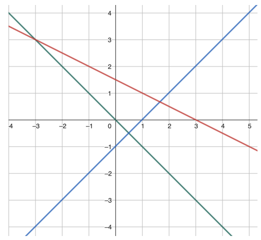
1.1.2.2 Interprétation graphique pour $n = 2$ et $n = 3$

Si $n = 2$, chaque équation correspond à l'équation cartésienne d'une droite, et il y a alors quatre cas possibles :
1. Les droites sont parallèles et le système n'a pas de solution
2. Les droites ne sont pas parallèles, mais elles n'ont pas de point d'intersection commun. Le système n'a alors pas de solution
3. Les droites se croisent en un point qui correspond à l'unique solution
4. Les droites sont confondues ou il n'y a qu'une seule droite. Le système a une infinité de solutions qui sont tous les points de cette droite.

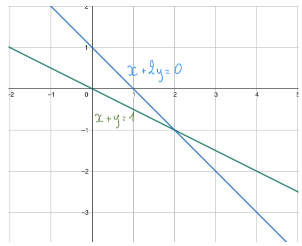
Exemples. 1. $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$



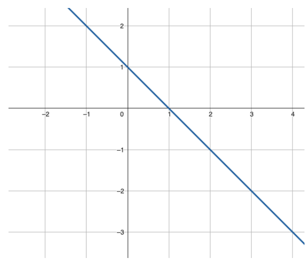
2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + -y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$



3. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$



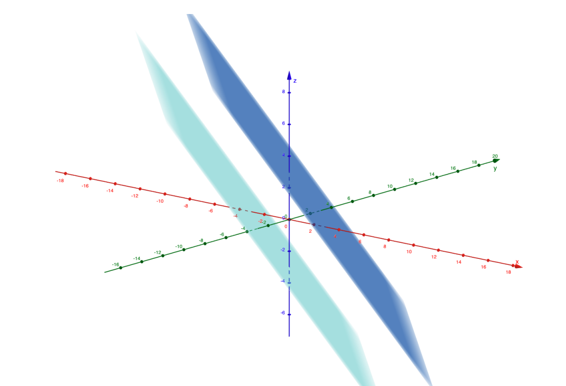
4. $\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$



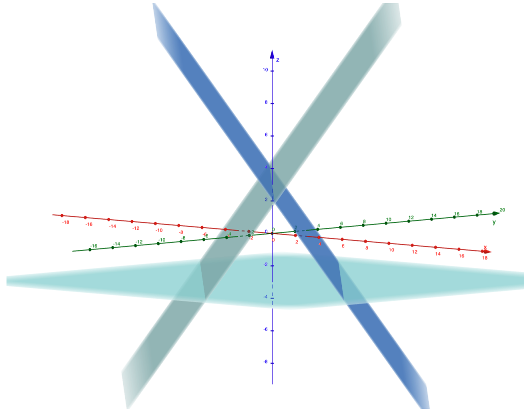
Si $n = 3$, chaque équation est représentée par un plan. Il y a alors cinq situations possibles :

1. Au moins deux plans sont parallèles et et distincts. Le système n'a alors pas de solution.
2. Tous les plans se croisent deux à deux, mais il n'y a pas d'intersection commune à tous les plans. Le système n'a alors pas de solution.
3. Tous les plans se croisent en une droite. Il y a alors une infinité de solutions, et elles sont toutes sur cette droite.
4. Tous les plans se croisent en un point qui correspond alors à l'unique solution du système.
5. Tous les plans sont confondus ou il n'y a qu'un plan. Le système a alors une infinité de solutions qui sont tous les points de ce plan.

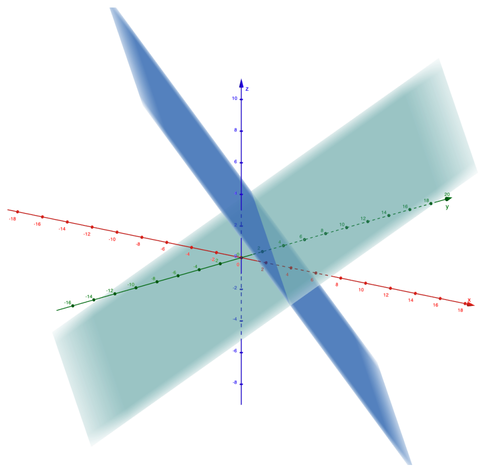
Exemples. 1. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$



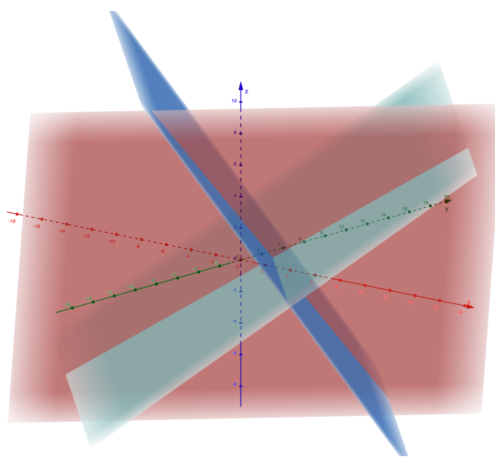
2. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -x-y+z=3 \\ z=0 \end{cases}$



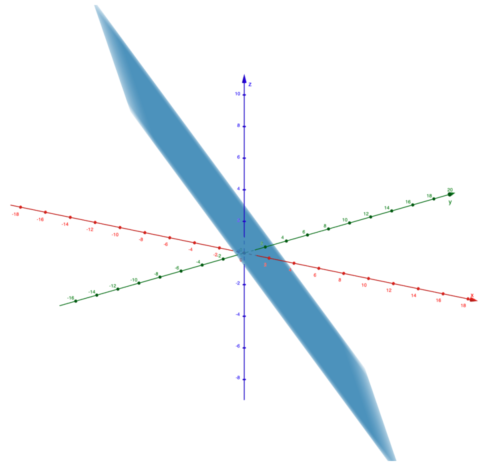
3. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$



4. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-2z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$



5. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases}$



1.1.3 Opérations élémentaires

Idée : transformer un système « complexe » en un autre « simple ». Voici un système « simple » :

$$\begin{cases} x_1 + \ 2x_2 - \ \ x_3 = 6 \\ \qquad x_2 + \ 3x_3 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 = 5 \end{cases}$$

Il est simple, parce que l'on peut le résoudre de bas en haut : $x_3 = 5$ donc $x_2 = -13$, donc $x_1 = 37$.

Même si n et m sont très grands, si un système a cette structure particulière, triangulaire, alors il est simple à résoudre. La suite de ce chapitre va consister à construire un algorithme qui permet de faire cela.

Définition 1.1.1.6 *Opérations élémentaires*

Soit un système de m équations à n inconnues, on note L_i la i–ème ligne :

$$L_i : a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i.$$

Les trois opérations sur les lignes suivantes sont appelées opérations élémentaires.

Opération élémentaire de type 1 Échanger les lignes i et j :

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Opération élémentaire de type 2 Multiplier la i–ème ligne par un nombre λ non nul :

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

Opération élémentaire de type 3 Ajouter à une équation un multiple d'une autre :

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

Exemple.

$$\begin{cases}2x_1+x_2=3\\x_1+3x_2=9\end{cases}\overset{L_2\leftarrow 2L_2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2x_1+x_2=3\\2x_1+6x_2=18\end{cases}$$

$$\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2x_1+x_2=3\\5x_2=15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\end{cases}$$

Remarque 1.1.1.7. *Ces opérations élémentaires sont réversibles, c'est-à-dire que l'on peut reprendre les calculs en sens inverse.*

Théorème 1.1.1.8

Si on peut obtenir un système d'équations $(*)_1$ à partir d'un système d'équations $(*)_2$ par une suite finie d'opérations élémentaires, alors les deux systèmes sont équivalents.

Démonstration. **Idée :** Si $(s_1,\ldots,s_n)$ est une solution de $(*)_1$, alors en remplaçant les x_i par les s_i, les égalités sont vraies. Or, si les égalités L_i et L_j sont vraies, λL_i et $L_i+\lambda L_j$ sont vraies. Inverser les lignes ne change pas non plus la véracité des égalités □

Donc pour résoudre un système, on va méthodiquement le transformer en un système équivalent « simple ». C'est le thème de la section suivante.

1.1.4 Matrices, matrices échelonnées-réduites

1.1.4.1 Matrices

On peut commencer par noter différemment un système d'équations linéaires. Disons pour l'instant que c'est par souci d'efficacité et de simplification. Voyons cela sur un exemple.

Exemple. Pour le système $\begin{cases}x_1+\ 2x_2 \qquad\ =4\\5x_1+\ 6x_2+\ 7x_3=8\end{cases}$, on va noter : $\begin{bmatrix}1&2&0&4\\5&6&7&8\end{bmatrix}$

Il n'y a aucune ambiguïté, les deux notations sont équivalentes.

Exemple. $\begin{bmatrix}4&-1&7&3\\2&0&1&6\\-1&10&0&0\end{bmatrix}$ correspond au système $\begin{cases}4x_1-x_2\quad+7x_3=3\\2x_1\qquad\quad +x_3=6\\-x_1+10x_2\qquad=0\end{cases}$

Plus généralement :

Définition 1.1.1.9 *Matrice augmentée*

Pour un système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

on définit la matrice des coefficients

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

et la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

On peut aussi noter :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

pour distinguer le second membre des coefficients du système.
La matrice augmentée contient m lignes qui correspondent aux m équations, et $n+1$ colonnes qui correspondent aux inconnues et au second membre.

Remarque 1.1.1.10. *La notation suivante est aussi une notation usuelle pour les matrices :*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leq\ i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$$

Le i de a_{ij} correspond à la i–ème ligne et le j à la j–ème colonne. Comme il y a m lignes et n colonnes, i varie de 1 à m et j varie de 1 à n.

On dira de manière équivalente qu'une matrice a m lignes et n colonnes, ou qu'une matrice est de taille $m \times n$.

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont équivalentes aux opérations sur les lignes d'une matrice.

Définition 1.1.1.11 *Matrices ligne-équivalentes*

On dira que deux matrices sont ligne-équivalentes si elles peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On notera alors, pour deux matrices A et B équivalentes : $A \sim B$.

Remarque importante 1.1.1.12

De manière évidente, deux matrices ligne-équivalentes correspondent à deux systèmes équivalents.

Pour résoudre un système, on va donc « oublier » le système, et travailler sur sa matrice augmentée. On va échelonner la matrice, comme décrit dans la section suivante.

Remarque 1.1.1.13. *Attention ! On parle bien d'opérations sur les lignes de la matrice, pas sur les colonnes ! Les solutions du système ne varient pas après des opérations* ***sur les lignes****.*

1.1.4.2 Matrices échelonnées-réduites

Définition 1.1.1.14 *Matrice échelonnée*

1. Le coefficient principal de la i–ème ligne est, s'il y en a un, le premier coefficient non nul sur cette ligne, en partant de la gauche.
2. Une matrice est échelonnée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
   (a) Les lignes nulles (si elles existent) sont regroupées en bas de la matrice.
   (b) Si elle possède des lignes non-nulles, alors le coefficient principal de chacune de ces lignes se trouve strictement à droite de celui de la ligne de dessus.

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{coefficients principaux} & \\
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
\times & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & \times & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \times & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right] & \text{escalier des coefficients principaux} \\
\text{lignes de } 0 & &
\end{array}$$

Exemples. Les matrices suivantes sont échelonnées :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Théorème 1.1.1.15

Toute matrice est ligne-équivalente à une matrice échelonnée.

Démonstration. Admis. □

Exemple.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pour avoir un coefficient principal qui vaut 1 tout à gauche sur la première ligne

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

il doit y avoir des 0 sous le coefficient principal de la première ligne, pour que les coefficients principaux des lignes inférieures soient strictement à sa droite

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

de même, le coefficient principal de la troisième ligne doit être strictement à droite de celui de la deuxième

La matrice est échelonnée.
On a donc l'équivalence des systèmes :

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 0 = -2 \end{cases}$$

Et on sait donc que ce système n'a pas de solution.

La notation matricielle simplifie l'écriture et rend la résolution des systèmes linéaires plus efficace. Mais les matrices, qui sont au cœur de l'algèbre linéaire, permettent d'aller bien au-delà de cette simple application.

Remarque importante 1.1.1.16

La matrice échelonnée dépend du choix des opérations élémentaires. Nous aurions pu, par exemple, échelonner de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Définition 1.1.1.17 *Matrice échelonnée-réduite*

Une matrice est échelonnée-réduite si :

1. elle est échelonnée,
2. les coefficients principaux valent 1,
3. les coefficients principaux sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

coefficients principaux

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{lignes de } 0 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemples. Les matrices suivantes sont échelonnées réduites

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées réduites

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 1.1.1.18. *Les logiciels de calcul matriciel utilisent souvent l'abréviation RREF (Reduced Row Echelon Form) pour désigner la forme échelonnée réduite d'une matrice.*

Contrairement aux matrices échelonnées, il y a unicité des matrices échelonnées-réduites :

Théorème 1.1.1.19

Toute matrice est ligne-équivalente à une unique matrice échelonnée-réduite.

Démonstration. Admis. □

Dès qu'une matrice est mise sous forme échelonnée, les opérations nécessaires pour obtenir une matrice échelonnée-réduite ne déplacent pas la position des coefficients principaux. Comme la forme échelonnée-réduite est unique, cela signifie que, quelle que soit la manière dont on a échelonné la matrice au départ, les coefficients principaux apparaissent toujours aux mêmes positions : celles de la matrice échelonnée-réduite.

Définition 1.1.1.20 *Pivot*

On appelle position de pivot d'une matrice A l'emplacement dans A correspondant à un coefficient principal (égal à 1) de la forme échelonnée réduite de A.
On appelle colonne pivot une colonne de A contenant une position de pivot.
Dans une forme échelonnée-réduite, les coefficients principaux (égaux à 1) sont appelés pivots.

Exemple.

pivots

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

colonnes pivot

Exemples. Réduisons la matrice échelonnée précédemment.

$$\begin{bmatrix}0&2&5&1\\1&4&3&2\\2&6&1&1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&4&3&2\\0&2&5&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix} \quad \textit{vu précédemment}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftrightarrow \frac{-1}{2}L_3} \begin{bmatrix}1&4&3&2\\0&2&5&1\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \textit{le coefficient principal de la troisième ligne doit valoir 1}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{bmatrix}1&4&3&2\\0&2&5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \textit{il doit être le seul coefficient non-nul de sa colonne}$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3} \begin{bmatrix}1&4&3&0\\0&2&5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \textit{idem}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix}1&4&3&0\\0&1&\frac{5}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \textit{le coefficient principal de la deuxième ligne doit valoir 1}$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2} \begin{bmatrix}1&0&-7&0\\0&1&\frac{5}{2}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad \textit{il doit être le seul coefficient non-nul de sa colonne}$$

1.1.5 L'algorithme de Gauss-Jordan

Pour réduire puis échelonner efficacement une matrice, on peut appliquer successivement les quatre étapes suivantes. La cinquième étape permet ensuite de réduire la matrice échelonnée.

1. On considère la colonne non nulle la plus à gauche. C'est une colonne pivot. La position de pivot est en haut de cette colonne.
2. On choisit comme pivot un élément non nul de la colonne pivot. Si nécessaire, on échange deux lignes pour amener cet élément à la position pivot.
3. On fait apparaître des 0 à toutes les positions situées sous le pivot à l'aide d'opérations élémentaires.
4. On ignore la ligne contenant la position de pivot (et, éventuellement, toutes les lignes au-dessus d'elle), et on applique les trois premières étapes à la sous-matrice restante. On répète ce processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune ligne non nulle à modifier.
5. On fait apparaître des 0 au-dessus de chaque pivot, en commençant par le pivot le plus à droite et en progressant vers le haut et vers la gauche. Si un coefficient principal est différent de 1, on divise sa ligne par sa valeur pour obtenir la valeur 1.

$$\begin{bmatrix}2&0&2&0&16\\5&2&1&2&4\\0&2&5&1&2\\1&2&0&4&1\end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\5&2&1&2&4\\0&2&5&1&2\\1&2&0&4&1\end{bmatrix}$$

La première colonne est non nulle. Le coefficient en haut à gauche est une position de pivot (pour faciliter les calculs suivants, on veut 1 en position de pivot, $L_1 \leftrightarrow L_4$ fonctionne aussi).

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&2&-4&2&-36\\0&2&5&1&2\\1&2&0&4&1\end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la première colonne

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&2&-4&2&-36\\0&2&5&1&2\\0&2&-1&4&-7\end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la première colonne

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&2&-4&2&-36\\0&0&9&-1&38\\0&2&-1&4&-7\end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la deuxième colonne

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&2&-4&2&-36\\0&0&9&-1&38\\0&0&3&2&29\end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la deuxième colonne

$$\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&1&-2&1&-18\\0&0&9&-1&38\\0&0&3&2&29\end{bmatrix}$$

On ignore la première ligne. La deuxième colonne est déjà bonne. On divise par 2 la deuxième ligne pour avoir 1 comme coefficient principal (on le fait maintenant pour simplifier les calculs suivants).

$$\overset{L_4 \leftarrow 3L_4}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&1&-2&1&-18\\0&0&9&-1&38\\0&0&9&6&87\end{bmatrix}$$

On ignore les deux premières lignes. La troisième colonne est une colonne pivot. On prépare la prochaine étape qui consistera à mettre 0 sur la quatrième ligne, troisième colonne.

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&1&-2&1&-18\\0&0&9&-1&38\\0&0&0&7&49\end{bmatrix}$$

On veut des 0 sous le pivot de la troisième colonne

$$\overset{L_4 \leftarrow \frac{1}{7}L_4}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&1&0&8\\0&1&-2&1&-18\\0&0&9&-1&38\\0&0&0&1&7\end{bmatrix}$$

Le pivot de la quatrième colonne doit valoir 1. Pour l'instant, on garde le coefficient principal de la troisième ligne à 9 pour ne pas complexifier les calculs à venir avec des fractions.

À ce stade, la matrice est échelonnée. On va terminer de la réduire, en « remontant » pour avoir des 0 et des 1 partout où c'est nécessaire.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$ *On veut des 0 au-dessus du pivot de la quatrième colonne*

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$ *On veut des 0 au-dessus du pivot de la quatrième colonne*

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{9} L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$ *Le coefficient principal doit valoir 1. Cela nous permettra de réduire plus simplement sur la troisième colonne*

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$ *On veut des 0 au-dessus du pivot de la troisième colonne*

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$ *On veut des 0 au-dessus du pivot de la troisième colonne*

La matrice est maintenant échelonnée-réduite.

Revenons au système :

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + \quad 2x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 \quad + 4x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -15 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = 7 \end{cases}$$

Cette méthode permet une résolution efficace d'un système. On verra par la suite qu'elle apporte aussi beaucoup d'informations utiles.

Théorème 1.1.1.21

Un système d'équations linéaires est compatible si et seulement si la colonne de droite (second membre) de sa matrice augmentée échelonnée-réduite n'est pas une colonne pivot.
C'est-à-dire qu'il n'y a aucune ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rappel Dans ce cas, il y a une seule ou une infinité de solutions.

Exemples. Les matrices augmentées suivantes correspondent à des systèmes compatibles :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice suivante correspond à un système qui n'a pas de solution :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.6 Variables de base et variables libres

Nous allons maintenant nous pencher sur les systèmes compatibles, sur l'unicité ou non des solutions, et comment exprimer les solutions quand il y en a une infinité.

Définition 1.1.1.22 *Variables de base, variables libres*

On appelle variables de base, ou variables liées, les variables qui correspondent aux colonnes pivot.
Les autres sont appelées variables libres.

Théorème 1.1.1.23

Un système admet une unique solution s'il est compatible, et si toutes les variables sont des variables de base, Il admet une infinité de solutions s'il est compatible, et s'il y a une variable libre au moins.

En général, quand on notera l'ensemble des solutions d'un système à une infinité de solutions, on notera les variables libres avec les lettres t, s, u, v.

Exemples.

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ x_2 est une variable libre. $x_1 = 3, x_3 = 1, x_4 = 1$. L'ensemble des solutions du système est $\mathcal{S} = \{(3, t, 1, 1), t \in \mathbb{R}\}$.

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ x_3 est une variable libre. $x_1 + x_3 = 3, x_2 + 2x_3 = 1, x_4 = 2$. On note $x_3 = t$ et l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(3 - t, 1 - 2t, t, 2), t \in \mathbb{R}\}$.

— $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ x_3 et x_4 sont des variables libres. $x_1 + x_3 + x_4 = 1$ et $x_2 + x_3 + x_4 = 0$. $\mathcal{S} = \{(1 - s - t, -s - t, t, s) | s, t \in \mathbb{R}\}$

Les matrices suivantes sont des matrices augmentées de systèmes à une infinité de solutions :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Les matrices suivantes sont des matrices augmentées de systèmes à une unique solution :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

1.1.7 Systèmes homogènes

Définition 1.1.1.24 *Système homogène*

Un système est dit homogène si tous les termes du second membre sont nuls.

Exemple. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$

Théorème 1.1.1.25

Un système homogène est toujours compatible.

Démonstration. Le second membre ne peut pas être une colonne pivot. □

Remarque importante 1.1.1.26

Attention ! Si l'on précise que la matrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ est la matrice d'un système **homogène**, alors la dernière colonne de la matrice ne correspond pas au second membre. Par exemple, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ est la matrice augmentée du système **homogène** suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$